Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No 3, 181-186
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2020.03.181

УДК 530.1

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ (ВАЖКОГО) КАНАТУ ВАНТАЖОПІДЙОМНОГО МЕХАНІЗМУ КРАНА У ПРОЦЕСІ ЙОГО ПУСКУ

Ю. В. Човнюк, І. М. Сівак

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 133 – галузеве машинобудування.

Кореспонденція авторів: sivakim@ukr.net.

Історія статті: отримано – квітень 2020, акцептовано – серпень 2020.
Бібл. 7, рис. 0, табл. 1.

Анотація. У роботі проведений аналіз вимушених коливань та хвилеутворень важких канатів вантажопідйомних механізмів кранів у процесах пуску останніх. Визначені основні параметри виникаючих при цьому хвилеутворень у канатах за різних способів підйому вантажу («з підхватом», «з ваги»). Досліджено вплив сили тяжіння на канат та виникаючі у ньому поздовжні коливання, також на виникаючі всередині нього поздовжні хвилеутворення. Канат вантажопідйомного механізму, при цьому, розглянутий, як розтяжний стрижень. Встановлені закони руху поперечних перерізів канатів, за яких мінімізовані у період пуску вантажопідйомних механізмів кранів зусилля, виникаючі у канатах. Також досліджено застосування інтегродиференціального рівняння, яке адекватно описує коливання канатної системи вантажних кранів, а також враховує частотно незалежне внутрішнє тертя у вказаних системах, котре супроводжує коливні процеси у канатах протягом перехідних реагентів їх диференціювання за різних способів підйому вантажів.

Визначені параметри встановлених гармонічних коливань канатної системи кранів для тривалого у часі підйому вантажу і врахування інерційних властивостей самого канату(значної довжини), а також величини статичного переміщення канату(для різних способів підйому вантажів).

Ключові слова: аналіз, вимушені коливання, важкі канати, вантажопідйомні механізми, крани, пуск, хвиле утворення, оптимізація, динамічні зусилля, інтегродиференціальне рівняння.

Постановка проблеми

Основні параметри виникаючих хвилеутворень у канатах за різних способів підйому вантажу, потребують дослідження та встановлення законів руху поперечних перерізів канатів, за яких мінімізовані зусилля, що виникають у канатах в період пуску вантажопідйомних механізмів кранів.

Аналіз останніх досліджень

У даній роботі використані підходи та результати досліджень авторів [1, 2, 3], які практикували застосування рівнянь математичної фізики для опису вимушених коливань. Принципи інерційних властивостей та величини статичного переміщення канату обґрунтовані у роботі [4]. Автори [5] досліджують інтегродиференціальне управління коливань групою систем з масонезалежним і внутрішнім тертям [6, 7]. Слід зазначити, що результати вказаних робіт будуть частково використанні у даному дослідженні і суттєво вдосконалені.

Мета досліджень

Мета роботи полягає у аналізі й дослідженні вимушених коливань та хвилеутворень важких канатів вантажопідйомних механізмів кранів у їх процесах пуску.

Результати досліджень

1. Припустимо, що ми маємо справу з доволі важким канатом вантажопідйомного механізму крану, який у той самий час є розтяжним стрижнем, довжина котрою у не розтягнутому стані дорівнює l. Підвисимо його за кінець x=0, а кінець x=l залишимо вільним. Під впливом сили тяжіння такий стрижень почне здійснювати поздовжні коливання, а всередині нього виникнуть поздовжні хвилеутворення. Якщо позначити через u (x, t) переміщення перерізу з абсцисою x у момент часу t, тоді диференціальне рівняння таких вимушених коливань розглядуваного стрижня буде мати вид:

$$\frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial t^2} = a^2 * \frac{\partial^2 u\,(x,t)}{\partial x^2} + g\;,\; a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1)$$

де: g – прискорення сили тяжіння, t – час, E – модуль пружності матеріалу стрижня/канату, ρ – щільність матеріалу.

Оскільки початкові переміщення й початкові швидкості дорівнюють нулю, тоді за фізичним змістом поставленої задачі нам треба знайти такий розв'язок рівняння (1), котрий задовольняв би граничним умовам:

$$u\Big/_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=e} = 0 \qquad (2)$$

та початковим умовам:

$$u\Big/_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{t=0} = 0 \qquad (3)$$

Використовуючи підхід роботи [1], такий розв'язок можна подати у наступній формі:

$$u(x,t) = \frac{g \cdot x \cdot (2l-x)}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 a^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{cos\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2e}\right] \cdot sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2e}\right]}{(2k+1)^3} \right. \qquad (4)$$

За допомогою (4) можна обчислити, у яких межах буде змінюватись довжина усього стрижня. Покладено у формулі (4) $x=l$, тоді отримаємо відносне переміщення кінцевого перерізу стрижня:

$$u\Big/_{x=e} = \frac{gl^2}{2a^2} - \frac{16gl^2}{\pi^3 \cdot a^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \cdot cos\left\{\frac{(2k+1)\cdot \pi at}{2l}\right\} \qquad (5)$$

Права частина цієї рівності досягає свою максимального значення у моменти часту t_n:

$$\frac{(2k+1)\cdot \pi a t_n}{2l} = \pi + 2n\pi, n = 0,1,2 \ldots \qquad (6)$$

Перший максимум реалізується при n=0:

$$\frac{(2k+1)\cdot \pi_a \cdot t_0}{2l} = \pi\Big/_{2k+1} \quad \leftrightarrow \quad t_0 = \frac{2l}{a} \qquad (7)$$

Приймаючи до уваги, що [1]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \qquad (8)$$

знайдемо найбільше переміщення кінцевого перерізу:

$$U_{max} = \frac{gl^2}{a^2} \qquad (9)$$

Звідси випливає, що при розглядуваних поздовжніх коливаннях довжина стрижня змінюється у межах від l до $l + \frac{gl^2}{a^2}$. Для сталевого стрижня довжиною

$$l=10^4 м \text{ з } a^2 = E\Big/_{g} = 2 \cdot 10^{11}\Big/_{8 \cdot 10^3} = \frac{1}{4} \cdot 10^8 \, м^2\Big/_{с^2}$$

маємо: $U_{max} = \frac{a_1 \cdot 10^8 \cdot 8 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11}} \cong 39{,}2$ м

Вимушені коливання важкого канату під дією прикладеної сили Q (на одиницю площі), спрямованої вздовж стрижня. Підйом вантажу «з підхватом».

Такі коливання стосуються рівнянням (1) з наступними початковими та граничними умовами:

$$U(x,0)=0; \ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0; \ U(0,t)=0; \ \frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \frac{Q}{E}; \ Q=\frac{mg}{S}, \qquad (10)$$

де m – маса вантажу, S – площа поперечного перерізу стрижня / канату.

Будемо розшукувати розв'язок (1) при умовах (10) наступним чином [1]:

$$U(x,t) = V(x,t) + W(x,t), \qquad (11)$$

де $V(x,t)$ є розв'язок цієї задачі (неоднорідного рівняння (1)), що задовольняє лише граничним умовам (10), а $W(x,t)$ – розв'язок однорідного рівняння:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (12)$$

який задовольняє граничні умови:

$$W\Big/_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big/_{x=e} = 0, \qquad (13)$$

й початковим умовам:

$$W\Big/_{t=0} = f(x) = -V\Big/_{t=0}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big/_{t=0} = F(x) = -\frac{\partial w}{\partial t}\Big/_{t=0} \qquad (14)$$

Розв'язок $V(x,t)$ можна подати у вигляді:

$$V(x,t) = A \cdot x^2 + Bx + C; \quad A=-\frac{g}{2a^2}; \ B=\frac{Q}{E} + \frac{g}{a^2}; \ C=0, \qquad (15)$$

тоді задовольняються як рівняння (1), так і граничні умови (10).

Звідси випливає, що:

$$f(x) = -\{Ax^2 + Bx\}, \ F(x)=0. \qquad (16)$$

Для $W(x,t)$ маємо [1]:

$$W(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \cos\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right] \cdot sin\left\{\frac{(2k+1)\cdot \pi x}{2l}\right\} \qquad (17)$$

де коефіцієнти a_k знаходимо зі співвідношень:

$$a_k = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \cdot sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right] dx \qquad (18)$$

Остаточно, розв'язок задачі у цьому випадку приймає вид:

$$U(x,t) = Ax^2 + Bx + C + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot cos\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right] \cdot sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right] = Ax^2 + Bx + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot cos\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right] \cdot sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right] \qquad (19)$$

Вимушені коливання важкого канату під дією підвішеного вантажу вагою Р. Підйом вантажу «з ваги».

Нехай до кінця $x=l$ пружного стрижня (модель канату вантажопідйомного крану), закріпленого у точці $x=0$, підвішений вантаж вагою Р (масою $m=P\Big/_{g}$. Дослідимо поздовжні коливання стрижня, припускаючи, що на нього діє зовнішня сила $\rho \cdot g$, тобто власне вага самого канату ($P_k = \rho \cdot g \cdot S \cdot l$).

Отже, задача у цьому випадку зводиться до розв'язку рівняння (1) за граничних умов:

$$U\Big/_{x=0} = 0, \ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big/_{x=e} = -C^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=e}, \ C = \sqrt{\frac{gE \cdot S}{P}} \qquad (20)$$

а також при початкових умовах:

$$U\Big/_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0} = 0. \qquad (21)$$

Переміщення перерізу стрижня $U(x,t)$ у даному випадку виражається сумою:

$$U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t), \qquad (22)$$

де $U_1(x,t)$ є розв'язок неоднорідного рівняння (1), який задовольняє тільки граничним умовам (20), а $U_2(x,t)$ - розв'язок однорідного рівняння:

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \qquad (23)$$

що задовольняє граничним умовам:

$$U_2\Big/_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big/_{x=l} = 0, \qquad (24)$$

а також початковим умовам:

$$U_2\Big/_{t=0}=\bar f(x)=U_1\Big/_{t=0},\qquad \frac{\partial u_2}{\partial t}\Big/_{t=0}=\bar F(x)=-\frac{\partial u_1}{\partial t}\Big/_{t=0} \quad (25)$$

Знайдемо розв'язок $U_1(x,t)$ у наступному вигляді:

$$U_1(x,t)=\alpha x^2+\beta x+\chi \leftrightarrow \alpha=-\frac{g}{2a^2};\quad \beta=\frac{gl}{a^2};\ \chi=0, \quad (26)$$

тому остаточно для $U_1(x,t)$ маємо:

$$U_1(x,t)=-\left(\frac{g}{2a^2}\right)\cdot x^2+\frac{gl}{a^2}x. \quad (27)$$

звідси:

$$\bar f(x)=\left(\frac{g}{2a^2}\right)x^2-\frac{gl}{a^2}x;\quad \bar F(x)=0. \quad (28)$$

Розв'язок $U_2(x,t)$має вид:

$$U_2(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar a_k\cdot\left\{\frac{\cos\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right]\cdot sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right]}{1}\right\} \quad (29)$$

де $\bar a_k$ знаходиться зі співвідношення:

$$\bar a_k=\frac{2}{l}\cdot\int_0^l \bar f(x)\cdot\sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right]dx \quad (30)$$

Остаточно, розв'язок задачі у цьому випадку приймає вид:

$$U(x,t)=\left(-\frac{g}{2a^2}\right)\cdot x^2+\frac{gl}{a^2}\cdot x+\sum_{k=0}^{\infty}\bar a_k\cdot cos\left[\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\right]\cdot sin\left[\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\right] \quad (31)$$

Вимушені коливання канату під дією системи сил, прикладених до обох його кінців ($x=0;\ x=l$). Підйом «з ваги» вантажу.

Використаємо підхід роботи [2]. Необхідно розв'язати наступну задачу. Слід знайти розв'язок рівняння (1) за наступних граничних умов:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big/_{x=l}=-C_1^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=l},\ C_1^2=\frac{gES}{P}; \quad (32)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big/_{x=0}=C_2^2\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=0},\ C_2^2=\frac{gES}{P_{\text{набл.}}},$$

де $P_{\text{набл}}=P_p-P$, а P_p – рушіння зусилля приводу вантажопідйомного механізму [3], й початкових умов:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big/_{t=0}=0,\quad U\Big/_{t=0}=0. \quad (33)$$

Розв'язок за умов (32), (33) має наступний вид:

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{a\lambda_k}\cdot\int_0^t f_k\cdot sin[a\cdot\lambda_k\cdot(t-\tau]d\tau\right\}X_k(x), \quad (34)$$

$$f_k=\frac{1}{\|X_k\|^2}\cdot g\cdot\int_0^l X_k(x)dx;\quad X_k(x)=\mathrm{H}\cdot\sin(\lambda_k\cdot X)+\lambda_k\cdot\cos(\lambda_k\cdot X); \quad (35)$$

$$H=-\frac{C_2^2}{a^2\lambda_k^2};\qquad h=-\frac{C_1^2}{a^2\lambda_k^2},\quad k=1,2,3\ldots$$

де $\lambda_k>0$ є розв'язками рівняння трансцендентного типу:

$$ctg(\lambda\cdot l)=\frac{H}{(H+h)}\cdot\left(\frac{\lambda}{H}-\frac{h}{\lambda}\right), \quad (36)$$

а $\|X_k\|^2$- квадрат норми функції X_k знаходимо зі співвідношення:

$$\|X_k\|^2=\int_0^l X_k^2(x)dx,\quad k=1,2,3\ldots$$

$$\int_0^{t_s}\left\{m_1\ddot S_1-P_{\text{набл.}}-P\right\}^2dt\to min;$$

$$\int_0^{t_s}\left\{m_2\ddot S_2+P\right\}^2dt\to min. \quad (37)$$

тобто λ_k – власні числа, X_k – власні функції задачі, $\|X_k\|$- норма власної функції.

2. Оптимізація режимів руху важких канатів вантажопідйомних механізмів кранів за різних способів підйому вантажу. Дискретно-континуальні моделі.

2.1. Підйом вантажу «з ваги».

Використаємо дискретну модель роботи [3] для моделювання процесу підйому вантажу «з ваги» пружним канатом, але внесено у неї зміни. Вважатимемо канат, що використовується у вантажопідйомному механізмі крана, континуальною системою (системою з розподіленими параметрами). У результаті модель стане дискретно-континуальною (або гібридною). Зокрема, для вказаного у назві п. 2.1 способу підйому вантажу, маємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$m_1\cdot\ddot S_1-E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=0}=P_{\text{набл.}}+P; \quad (38)$$

$$\ddot S_1=\frac{d^2S_1}{dt^2};$$

$$m_2\cdot\ddot S_2+E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=l}=-P;\quad \ddot S_2=\frac{d^2S_2}{dt^2},$$

де S_1 й S_2 – незалежні переміщення приведеної маси механізму приводу вантажопідйомного механізму крана m_1 та вантажу $m_2=P/g$. З системи (38) легко знаходимо:

$$E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=0}=m_1\cdot\ddot S_1-P_{\text{набл.}}-P;$$

$$E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=l}=-P-m_2\cdot\ddot S_2. \quad (39)$$

Введемо позначення:

$$E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=0}=F_1(t);\ E\cdot S\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\Big/_{x=l}=F_2(t); \quad (40)$$

Визначимо закони руху $S_1(t)$ й $S_2(t)$, за яких якість цих рухів задовольняє наступним критеріям:

$$\int_0^{t_s}[F_1(t)]^2dt\to min; \quad (41)$$

$$(41)\int_0^{t_s}[F_2(t)]^2dt\to min,$$

де t_s – тривалість процесу пуску вантажопідйомного механізму крана. Фізичний зміст критеріїв (41) полягає у тому, що у точках $x=0$ й $x=l$ перерізу канату мінімізовані зусилля у пружному елементі. Враховуючи (39) критерії якості руху системи (41) приймають вид:

Необхідною умовою реалізації критеріїв (42) є диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$S_1^{(IV)}=0;\qquad S_2^{(IV)}=0. \quad (43)$$

Рівняння (43) слід розв'язати при наступних граничних (початкових/кінцевих) умовах підйому вантажу «з ваги»:

$$S_1\Big/_{t=0}=0;\ \dot S_1\Big/_{t=0}=0;\ \dot S_1\Big/_{t=ts}=V;$$

$$\ddot S_1\Big/_{t=ts}=0;\ S_2\Big/_{t=0}=\Delta S=\frac{P\cdot l}{S\cdot E};\ \dot S_2\Big/_{t=0}=0;$$

$$\dot S_2\Big/_{t=ts}=V;\ \ddot S_2\Big/_{t=ts}=0, \quad (44)$$

де V- номінальна швидкість підйому вантажу.

У результаті отримуємо оптимальні (у сенсі критеріїв (42) закони руху $S_1(t)$ й $S_2(t)$:

$$S_1(t)=\frac{V}{t_s}\cdot t^2-\frac{V}{3t_s^2}\cdot t^3;\ S_2(t)=\Delta S+\frac{V}{3t_s^2}\cdot t^3. \quad (45)$$

Визначимо закон розповсюдження у канаті вантажопідйомного механізму крана $u(x,t)$ хвиле утворень/коливань за законів руху його кінців $(x=0$ та x=l*)* типу (45) при підйому вантажу «з ваги». Для цього слід знайти розв'язки рівняння (1) при наступних початкових і кінцевих/граничних умовах:

$$U/_{t=0}=0;\quad \dot{U}/_{t=0}=0;\quad U/_{x=0}=S_1(t);\quad U/_{x=l}=S_2(t). \qquad (46)$$

Використовуючи підхід роботи [1], матимемо наступний розв'язок:

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t);\quad W(x,t)=S_1(t)+[S_2(t)-S_1(t)]\cdot\frac{x}{l};$$

$$V(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{a\cdot\lambda_k}\cdot\int_0^t f_k(\tau)\cdot sin[a\cdot\lambda_k\cdot(t-\tau]d\tau+\varphi_k\cdot\ cos[a\cdot\lambda_k\cdot t]\right\}X_k(x); \qquad (47)$$

$$\varphi_k=\frac{1}{\|X_k(x)\|}\cdot\int_0^l\left\{-\frac{P\cdot X}{S\cdot E}\right\}\cdot X_k(x)dx;\ f_k(t)=\frac{1}{\|X_k(x)\|}\cdot\int_0^l\left\{g-\frac{2V}{t_s}+\frac{2V\cdot t}{t_s^2}\right\}\cdot X_k(x)dx;$$

$$X_k(x)=sin\left(\frac{\pi\cdot k\cdot x}{l}\right);\quad k=1,2,3\ldots;\ \|x_k\|^2={}^{l}/_{2};\ \lambda_k=\frac{\pi^2\cdot k^2}{l^2}$$

2.2. Підйом вантажу «з підхватом».

У режимі підйому вантажу «з підхватом» рівняння для визначення законів руху $S_1(t)$ й $S_2(t)$ залишаються таким ж, як і у попередньому випадку (підйом вантажу «з ваги»), тобто це рівняння типу (43). Проте випадку підйому вантажу «з підхватом» початкові умови руху змінюються і набувають наступного виду:

$$S_1/_{t=0}=0;\quad \dot{S}_1/_{t=0}=V_0;\quad \dot{S}_1/_{t=ts}=V;\quad \ddot{S}_1/_{t=ts}=0;\quad S_2/_{t=0}=0;\quad \dot{S}_2/_{t=0}=V_0;\quad \dot{S}_2/_{t=ts}=V;\ \ddot{S}_2/_{t=ts}=0, \qquad (48)$$

де V_0 – початкова швидкість підйому вантажу ($V_0<\cdot V$) (Якщо при підйомі вантажу «з ваги» канат перед початком руху вже має деформацію розтягу від статичного навантаження - ΔS, а швидкість системи дорівнює при цьому нулю, то при підйомі вантажу «з підхватом» у початковий момент деформація канату дорівнює нулю (оскільки вага вантажу сприймається основною), але приведена маса привода у процесі прибирання слабини канату швидкість V_0, близьку до номінальної V (підйому вантажу), $V_0<V$). Тому, з урахуванням умов (48) для $S_1(t)$ й $S_2(t)$ маємо:

$$S_1(t)=S_2(t)=V_0\cdot t+\frac{(V-V_0)}{t_s}\cdot t^2-\frac{(V-V_0)}{3t_3^2}\cdot t^3 \qquad (49)$$

Остаточно, використовуючи підхід роботи [1], для $u(x,t)$ маємо наступний розв'язок:

$$U(x,t)=\bar{V}(x,t)+\bar{W}(x,t);\ \bar{W}(x,t)=S_1(t);$$

$$\bar{V}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{a\cdot\lambda_k}\cdot\int_0^t\bar{f}_k(\tau)\cdot sin[a\cdot\lambda_k\cdot(t-\tau]d\tau\right\}X_k(x);$$

$$\bar{f}_k(t)=\frac{1}{\|X_k(x)\|}\cdot\int_0^l\left\{g-\frac{2(V-V_0)}{t_s}+\frac{2(V-V_0)\cdot t}{t_s^2}\right\}\cdot X_k(x)dx \qquad (50)$$

Маса канату m обчислюється за формулою:

$$m=\beta\times S\times l \qquad (51)$$

де β - щільність матеріалу(канату).

Рівняння коливань для випадку, коли:

$Q(t)$ =m$\ddot{y}$(t)+(Q_0)̅+×sin $wt\ Q_0{}^{(s)}$+cos $wt\ Q_0{}^{(c)}$, (52)

де $\overline{Q_0}$-постійна сила, незалежна від t, $Q_0{}^{(s)}$й $Q_0{}^{(c)}$-амплітуди, w-кутова частота внутрішньої сили, запускається наступним чином [3]:

$$y(t)=-\lambda\times\int_0^t\frac{\ddot{y}(r)dr}{(t-r+\upsilon)}+\mu_0{}^{(s)}\times\int_0^t\frac{\sin wrdr}{(t-r+\upsilon)}+\mu_0{}^{(c)}\times\int_0^t\frac{\cos wrdr}{(t-r+\upsilon)}+\gamma\times\int_0^t\frac{dr}{(t-r+\upsilon)}, \qquad (53)$$

де:

$$\lambda=\frac{m}{Q\times C_0},\ \mu_0{}^{(s)}=\frac{y_{\text{ст}}{}^{(s)}}{Q},\ \mu_0{}^{(c)}=\frac{y_{\text{ст}}{}^{(c)}}{Q},k_0=\sqrt{\frac{C_0}{m}},$$

$$y_{\text{ст}}{}^{(s)}=\frac{Q_0{}^{(s)}}{C_0},\ y_{\text{ст}}{}^{(c)}=\frac{Q_0{}^{(c)}}{C_0},\gamma=\frac{Q_0}{Q\times C_0}, \qquad (54)$$

k_0-кутова частота власних незатихаючих коливань (канатної) системи; $y_{\text{ст}}{}^{(c)}$, $y_{\text{ст}}{}^{(s)}$-переміщення системи під дією статично прикладеної сили $Q_0{}^{(c)}$ чи $Q_0{}^{(s)}$відповідно.

Формули для k_0 можна дещо спростити:

$$k_0=\sqrt{\frac{C_0}{m}}=\sqrt{\frac{E_0\times S}{l\times\beta\times S\times l}}=\frac{1}{l}\times\sqrt{\frac{E_0}{\beta}}. \qquad (55)$$

Нижче, у таблиці наведені значення k_0,c^{-1} для сталевих канатів різної довжини (E_0=2,1× 10"Па; β=7,8× 10^3кг/м^3)

Оцінка останнього члена у рівнянні (54),утворена у [1], для сталевих канатів (Q>>1) дозволяє знехтувати розбіжністю цього інтервалу в часі й вважати ,що він має бути останній у вигляді γ=$\frac{\overline{Q_0}}{Q\times C_0}$. Тоді рівняння 54 надано в такому вигляді :

$$y(t)=-\lambda\int_0^t\frac{y(\ddot{r})dr}{(t-r+\upsilon)}+\mu_0{}^{(s)}\times\int_0^t\frac{\sin wrdr}{(t-r+\upsilon)}+\mu_0{}^{(c)}\times\int_0^t\frac{\cos wrdr}{(t-r+\upsilon)}+\gamma \qquad (56)$$

Таблиця. Значення k_0, c^{-1} для різних довжин l, m сталевих канатів.

Table. The values of k_0, c^{-1} for different lengths l, m of steel ropes.

l,m	k_0, c^{-1}
10	518.9
50	103.8
100	51.9
200	26.0
300	17.3
500	10.4
1000	5.0
2000	2.6
3000	1.7
5000	1.0
10000	0.5

Введемо позначення :

$$y(t)-\gamma=Y(t). \qquad (57)$$

Тоді легко показати ,що $\ddot{y}$(t) =$\ddot{Y}$(t), оскільки γ=const у (56).

Оскільки для Y(t) отримаємо наступне рівняння :

$$Y(t)=-\lambda\times\int_0^t\frac{(\ddot{r})dr}{(t-r+\upsilon)}Y+\mu_0{}^{(s)}\times\int_0^t\frac{\sin wrdr}{(t-r+\upsilon)}+\mu_0{}^{(c)}\times\int_0^t\frac{\cos wrdr}{(t-r+\upsilon)} \qquad (58)$$

Шукаємо розв'язок (58):

$$\begin{cases}Y(t)=A\times sinwt+Bcoswt; Y(t)=Y_0\times\sin(wt+\beta);\\ A=Y_0\times cos\beta; B=Y_0\times sin\beta; Y_0=\sqrt{A^2}+\sqrt{B^2}; tg\beta=\frac{B}{A}.\end{cases} \qquad 59)$$

Дослідимо усталені вимушені коливання під дією гармонічної вимушеної сили, для яких для яких справедливе рівняння (58) зі зміненим значенням нижньої границі інтегрування ($0 \to -\infty$) [4].

Для визначення коефіцієнтів A та B підставимо розв'язок (59) у рівняння (58).Матимемо рівність:

$$A\sin wt + B\cos\cos wt - \lambda \times \int_{-\infty}^{t} \frac{coswrdr}{(t-r+\upsilon)} dr = \mu_0{}^{(s)} \int_{-\infty}^{t} \frac{\sin wrdr}{(t-r+\upsilon)} + \mu_0{}^{(c)} \times \int_{-\infty}^{t} \frac{\cos wrdr}{(t-r+\upsilon)}. \quad (60)$$

Введемо наступні позначення:

$$I_1 = \int_{-I_1\infty}^{t} \frac{\sin wrdr}{(t-r+\upsilon)}, I_2 = \int_{-\infty}^{t} \frac{\cos wrdr}{(t-r+\upsilon)} \quad (61)$$

Після заміни змінних $r_1 = w \times (t - r + \upsilon)$ інтервалами I_1 та I_2 зведемо до виду:

$$I_1 = -\int_{w\upsilon}^{\infty} \frac{\sin(r_1-\upsilon)}{r_1} dr_1, \quad I_2 = \int_{w\upsilon}^{\infty} \frac{\cos(r_1-\upsilon)}{r_1} dr_1, \quad (62)$$

Покриваючи $\sin(r_1 - \upsilon)$ й $cos(r_1 - \upsilon)$, знайдемо:

$$I_1 = \cos\gamma \times \mathrm{Si}(wt) - \sin\gamma \times \mathrm{Ci}(wt), \ I_2 = -sin\gamma \times \mathrm{Si}(wt) - cos\gamma \times \mathrm{Ci}(wt) \quad (63)$$

Тут Si(x) та Ci(x)- інтегральні синус і косинус котрі вводяться наступним співвідношенням:

$$\begin{cases} Si(w\upsilon) = -\int_{w\upsilon}^{\infty} \frac{sinx}{x} dx = -\frac{\pi}{2} + \int_{0}^{-w\upsilon} \frac{sinx}{x} dx \\ Ci(w\upsilon) = -\int_{w\upsilon}^{\infty} \frac{cosx}{x} dx = C + lnw\upsilon + \int_{0}^{w\upsilon} \frac{cosx}{x} dx \end{cases} \quad (64)$$

C=0,57723…- постійна Ейлера, $w\upsilon = w\upsilon_0 \times \exp(-Q)$

У подальшому приймаємо $\lambda = wt$, оскільки у[1] було показано, що $w\upsilon \approx 0$.

Збираємо у (60) всі члени при $\sin wt$ й $cos wt$, матимемо:

$$\left[A + \left(\gamma A\omega^2 + +\mu_0^{(s)}\right) Ci(w\upsilon) + (\gamma B\omega^2 + +\mu_0^{(c)}) \times Si(w\upsilon)\right] \times \sin wt + \left[B - \left(\gamma A\omega^2 + +\mu_0^{(s)}\right) Si(w\upsilon) + (\gamma B\omega^2 + +\mu_0^{(c)}) \times Ci(w\upsilon)\right] \times \cos wt = 0 \quad (65)$$

Оскільки вирази у квадратних дужках не залежать від змінної t, тоді звідси випливає:

$$\begin{cases} A + (\gamma A\omega^2 + +\mu_0^{(s)}) Ci(w\upsilon) + (\gamma B\omega^2 + +\mu_0^{(c)}) \times Si(w\upsilon) = 0 \\ B - (\gamma A\omega^2 + +\mu_0^{(s)}) Si(w\upsilon) + (\gamma B\omega^2 + +\mu_0^{(c)}) \times Ci(w\upsilon) = 0 \end{cases} \quad (66)$$

Розв'язавши, цю систему (66) лінійних алгебраїчних рівнянь, знайдемо A та B.

$$\begin{cases} A = \frac{\Delta A}{\Delta}; B = \frac{\Delta B}{B}; \ \Delta = [1 + \lambda\omega^2 \times Ci(\omega\lambda)]^2 + \lambda^2\omega^4 Si^2(\omega\upsilon); \\ \Delta A = \left[-\mu_0^{(s)} \times Ci(w\upsilon) - \mu_0^{(c)} \times Si(w\upsilon)\right] \times [1 + \lambda\omega^2 \times Ci(w\upsilon)] - \\ \quad - \left[-\mu_0^{(s)} \times Si(w\upsilon) - \mu_0^{(c)} \times Ci(w\upsilon)\right] \times \lambda\omega^2 \times Si(w\upsilon); \\ \Delta B = [[1 + \lambda\omega^2 \times Ci(w\upsilon)]] \times \left[\mu_0^{(s)} \times Si(w\upsilon) - \mu_0^{(c)} \times Ci(w\upsilon)\right] + \\ \quad + [-\lambda\omega^2 \times Si(w\upsilon)] \times \left[\mu_0^{(s)} \times Ci(w\upsilon) + \mu_0^{(c)} \times Si(w\upsilon)\right]. \end{cases} \quad (67)$$

Таким чином, рішення y(t) (56) має вигляд $y(t) = \text{ϰ} + A\sin\boldsymbol{\omega}t + B\cos\boldsymbol{\omega}t$. (68)

Для вантажу сталевим канатом "з ваги" (якщо канат вважається приручним) маємо наступні значення $\overline{Q_0}$, $Q_0^{(s)}$ та $Q_0^{(c)}$:

$$\begin{cases} \overline{Q_0} = \frac{m_2 \times P_{надл}}{(m_1+m_2)} + Q; \ Q_0^{(s)} = 0; \ Q_0^{(c)} = -\frac{m_2 \times P_{надл}}{(m_1+m_2)}; \\ \omega = \sqrt{\frac{C \times (m_1+m_2)}{m_1 \times m_2}}, \end{cases} \quad (69)$$

де, C-жорсткість канату; (m_1, m_2)- приведені маси приводу і вантажу відповідно; Q-вантажу вала; $P_{надл} = (P_p - Q)$ – надлишкове зусилля приводу; P_p – рушійне зусилля приводу.

Для варіанту підйому вантажу сталевим канатом з підхватом" (якщо канат вважається приручним) значення $\overline{Q_0}$, $Q_0^{(s)}$ та $Q_0^{(c)}$ визначаються наступним чином:

$$\overline{Q_0} = \frac{m_2 \times P_{надл}}{(m_1+m_2)} + Q; \ Q_0^{(s)} = \frac{C \times V}{\omega}; \ Q_0^{(c)} = -\frac{m_2 \times P_{надл}}{(m_1+m_2)} - Q, \quad (70)$$

де V-номінальна(чи близька до неї) швидкість підйому вантажу.

Висновки

1. Визначені основні параметри виникаючих при цьому хвилеутворень у канатах за різних способів підйому вантажу («з підхватом», «з ваги»). Досліджено вплив сили тяжіння на канат та виникаючі у ньому поздовжні коливання, також на виникаючі всередині нього поздовжні хвилеутворення. Канат вантажопідйомного механізму, при цьому, розглянутий, як розтяжний стрижень. Встановлені закони руху поперечних перерізів канатів, за яких мінімізовані у період пуску вантажопідйомних механізмів кранів зусилля, виникаючі у канатах. Також досліджено застосування інтегродиференціального рівняння, яке адекватно описує коливання канатної системи вантажних кранів, а також враховує частотно незалежне внутрішнє тертя у вказаних системах, котре супроводжує коливні процеси у канатах протягом перехідних реагентів їх диференціювання за різних способів підйому вантажів.
2. Визначені параметри встановлених гармонічних коливань канатної системи кранів для тривалого у часі підйому вантажу і врахування інерційних властивостей самого канату(значної довжини), а також величини статичного переміщення канату(для різних способів підйому вантажів).

Список літератури

1. *Zaichenko S., Shalenko V., Shevchuk N., Vapnichna V.* Development of a geomechanic complex for geotechnical monitoring contour mine groove. *Eastern-European J. Enterprise Technologies.* 2017. Vol. 3/9 (87). P. 19-25. DOI: 10.155/1729-4061.2017.102067.

2. *Гарнець В. М., Човнюк Ю. В., Зайченко С. В., Шаленко В. О., Приходько Я. С.* Теорія і практика створення бетоноформувальних агрегатів (БФА). *Гірн., буд., дор. та меліор. машини.* 2014. Вип. 83. С. 49-54.

3. *Гарнець В. М., Зайченко С. В., Приходько Я. С., Шаленко В. О.* Розробка науково-практичних рекомендацій по створенню бетоноформуючих агрегатів (БФА). *Гірн., буд., дор. та меліор машини.* 2012. Вип. 79. С. 46-52.

4. *Зайченко С. В., Шевчук С. П., Гарнець В. М.* Енергетичний аналіз процесу роликового ущільнення. *Енергетика: Економіка, технологія, екологія.* 2012. № 1 (30). С. 77-83.

5. *Зайченко С. В., Шевчук С. П., Гарнець В. М.* Тривимірне моделювання процесу роликового ущільнення стовбурного кріплення. *Гірн., буд., дор. та меліор. машини.* 2012. Вип. 79. С. 40-45.

6. *Приходько Я. С., Гарнець В. М.* Взаємоузгодженість роботи механізмів при ролико-екструзійному формуванні багатопустотних виробів. *Галузеве машинобуд., буд-во.* 2012. № 1 (31). С. 305-310.

7. *Loveikin V., Romasevych Y., Shymko L., Ohiienko M., Duczmal W., Potwora W., Titova L.,*

Rogovskii I. Agrotronics and optimal control of cranes and hoisting machines: monograph. Opole: The Academy of Management and Administration in Opole. 2020. 164 p.

References

1. *Zajchenko, S. V., Shevchuk, S. P., Garnec,' V. M.* (2012). Three-dimensional modeling of process of roller consolidation of column fastening. Mining, construction, road and meliorative machines, No. 79, 40-45.

2. *Prihod'ko, Ja., S. & Garnec,' V. M.* (2012). Interconsistency of operation of mechanisms at roller and extrusive formation of multihollow products. Branch mechanical engineering, construction, No. 1 (31), 305-310.

3. *Lovejkin, V. S. & Pochka, K. I.* (2007). Determination of optimum value of a corner of shift of cranks of roller forming installation with the recuperative drive. Automation of productions in mechanical engineering and instrument making, National University "Lviv Polyequipment", No. 41, 127-134.

4. *Lovejkin, V. S. & Pochka, K. I.* (2008). Definition of loadings in elements of roller forming installations. Collection of scientific works of Ukrainian state academy of railway transport, No 88, 15-20.

5. *Lovejkin, V. S. & Pochka, K. I.* (2007). Definition of loadings in elements of roller forming installation. Theory and practice of construction, No. 3, 19-23.

6. *Lovejkin, V. S. & Pochka, K. I.* (2012). Research of dynamic loadings in elements of roller forming installations. Formation of Modern Science – 2012: Materials VIII of the intern. sci. and pract. conf. Section 18. Technical science. Formation of information technologies, Praha, 20-25.

7. *Loveikin V., Romasevych Y., Shymko L., Ohiienko M., Duczmal W., Potwora W., Titova L., Rogovskii I.* (2020). Agrotronics and optimal control of cranes and hoisting machines: monograph. Opole: The Academy of Management and Administration in Opole. 164.

ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ (ТЯЖЕЛАЯ) КАНАТА ГРУЗОПОДЪЕМНОГО МЕХАНИЗМА КРАНА В ПРОЦЕССЕ ЕГО ПУСКА

Ю. В. Човнюк, И. Н. Сивак

Аннотация. В работе проведен анализ вынужденных колебаний и волнообразований тяжелых канатов грузоподъемных механизмов кранов в процессах пуска последних. Определены основные параметры возникающих при этом волнообразование в канатах при различных способах подъема груза («с подхватом», «по весу»). Исследовано влияние силы тяжести на канат и возникающие в нем продольные колебания, а также на возникающие внутри него продольные волнообразования. Канат грузоподъемного механизма, при этом, рассмотрен, как растяжимый стержень. Установленные законы движения поперечных сечений канатов, при которых минимизированы в период пуска грузоподъемных механизмов кранов усилия, возникающие в канатах. Также исследовано применение интегродифференциальных уравнение, адекватно описывает колебания канатной системы грузовых кранов, а также учитывает частотно независимое внутреннее трение в указанных системах, которое сопровождает колеблющиеся процессы в канатах течение переходных реагентов их дифференцировки при различных способах подъема грузов.

Определены параметры установленных гармонических колебаний канатной системы кранов для длительного во времени подъема груза и учета инерционных свойств самого каната (значительной длины), а также величины статического перемещения каната (для разных способов подъема грузов).

Ключевые слова: анализ, вынужденные колебания, тяжелые канаты, грузоподъемные механизмы, краны, пуск, волнообразования, оптимизация, динамические усилия, интегродифференциальных уравнения.

DISCRETE-CONTINUOUS SIMULATION AND ANALYSIS OF FORCED OSCILLATIONS OF (HEAVY) ROPE OF CRANE LOADING MECHANISM IN ITS PROCESS

Yu. V. Chovnyuk, I. M. Sivak

Abstract. The analysis of forced oscillations and waveformations of heavy ropes of hoisting mechanisms of cranes in the processes of starting the latter is carried out. The main parameters of the resulting waveforms in the ropes for different ways of lifting the load ("with a pickup", "by weight") are determined. The influence of gravity on the rope and the longitudinal oscillations arising in it, as well as on the longitudinal waveforms arising inside it are investigated. The rope of the lifting mechanism, in this case, is considered as a tensile rod. The laws of motion of cross-sections of ropes are established, according to which the forces arising in ropes are minimized during the start-up of hoisting mechanisms of cranes. The application of the integrodifferential equation, which adequately describes the oscillations of the rope system of cargo cranes, and also takes into account the frequency-independent internal friction in these systems, which accompanies the oscillatory processes in the ropes during transient reagents for their differentiation by different ways of lifting loads.

The parameters of the established harmonic oscillations of the rope system of cranes for long-term lifting of the load and taking into account the inertial properties of the rope (considerable length), as well as the magnitude of the static movement of the rope (for different ways of lifting loads) are determined.

Key words: analysis, forced oscillations, heavy ropes, lifting mechanisms, cranes, start-up, wave formation, optimization, dynamic forces, integrodifferential equation.

Ю. В. Човнюк ORCID 0000-0002-0608-0203.
І. М. Сівак ORCID 0000-0002-6297-587X.