*Machinery & Energetics. Journal of Production Research. Kyiv. Ukraine. 2019, Vol. 10, No. 2, 147-154*
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

DOI: 10.31548/machenergy.2019.02.147-154

УДК 514.18

# КОЧЕННЯ БАГАТОКУТНИКА ПО КРИВОЛІНІЙНОМУ ПРОФІЛЮ

**Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, В. М. Бабка, Я. С. Кремець**

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

*Кореспонденція авторів:* tanyakresan@i.ua.

*Історія статті: отримано – квітень 2019, акцептовано – червень 2019.*
*Бібл. 5, рис. 13, табл. 0.*

**Анотація.** В статті розглянуто кочення плоскої фігури у вигляді рівностороннього багатокутника по криволінійному профілю. Профіль є періодичним і утворюється послідовним повторенням дуги симетричної кривої в прямолінійному напрямку. Рівняння кривої, з дуги якої конструюється криволінійний профіль, знайдено за умови, що центр багатокутника при його коченні по профілю, має рухатися по прямій лінії. Кочення відбувається за відсутності ковзання, тому довжина дуги кривої дорівнює довжині сторони багатокутника. При з'єднанні сусідніх дуг профілю утворюється точка звороту, у якій можна провести дотичні до обох дуг. Кут між цими дотичними має бути рівним кутові між сусідніми сторонами багатокутника. Наприклад, для квадрата цей кут є прямим. Виконання цієї умови необхідно для забезпечення плавного перекочування багатокутника при походженні його вершини через точку звороту.

На основі встановлення залежностей між сторонами і кутами розглянутих фігур, одна з яких перекочується по іншій, було складено диференціальне рівняння першого порядку, яке має аналітичний розв'язок. Цим розв'язком є явне рівняння розшукуваної кривої. Переходом від явного до натурального рівняння з'ясовано, що знайденою кривою є відома ланцюгова лінія. Знайдено координати точок на кривій, які обмежують дугу потрібної довжини. Наведено вираз для визначення періоду криволінійного профілю.

В статті показано доцільність застосування супровідного тригранника кривої для перевірки достовірності отриманого результату. При русі тригранника вздовж плоскої кривої один його орт є дотичним до неї, а другий – перпендикулярний до першого. В системі цих двох взаємно перпендикулярних ортів (дотичної і головної нормалі) задається такий відносний рух точки, який моделює перекочування дотичної по кривій. Сума двох рухів – відносного руху точки в системі тригранника і переносного руху самого тригранника по кривій – дає абсолютну траєкторію точки. Для застосування такого підходу необхідно мати рівняння кривої у функції довжини власної дуги. За таке рівняння було взято натуральне рівняння ланцюгової лінії. Було складено рівняння відносного руху точки, яка є центром багатокутника, в рухомій системі супровідного тригранника. При додаванні відносного і переносного рухів було отримано абсолютну траєкторію, якою є пряма лінія. Цим було підтверджено той факт, що розшукуваною кривою є саме ланцюгова лінія. В статті сформульовано відповідне твердження. Також показано, що число сторін багатокутника повинне бути більше трьох. Для трикутника кочення стає неможливим в момент проходження точки звороту криволінійного профіля.

**Ключові слова:** рівносторонній багатокутник, криволінійний профіль, кочення, ланцюгова лінія.

## Постановка проблеми

В праці [1] розглянуто деякі плоскі фігури, в тому числі багатокутники, які можуть перекочуватися по криволінійному періодичному профілю без ковзання. Автором розглянута можливість їх руху по такому профілю під дією сили власної ваги.

## Аналіз останніх досліджень

Відомою є задача утворення циклоїди, яка є траєкторією точки кола, що котиться по прямій лінії [2]. В праці [3] розглянуто траєкторії фокуса кривої другого порядку, яка котиться по прямій лінії. Зокрема, траєкторією фокуса параболи є відома крива – ланцюгова лінія. Кочення еліпса по прямій лінії розглянуто в праці [4].

## Мета досліджень

Розробити аналітичний опис криволінійного профілю, по якому рівносторонній багатокутник буде перекочуватися без ковзання і його центр рухатиметься по прямій лінії.

## Результати досліджень

Нехай частинка має форму квадрата, а криволінійним профілем кочення буде дуга кола. З умови кочення без ковзання довжина дуги має бути рівною довжині сторони квадрата $AB$. Радіус кола $R$ знайдемо за умови, що на кінцях дуга кола перетинає горизонтальну пряму під кутом 45°. Це забезпечить плавне перекочування квадрата через точку, в якій діагональ квадрата розташована вертикально (рис. 1). Побудувавши проміжні положення квадрата при його коченні за допомогою комп'ютерної програми можна побачити, що точка $C$ – центр квадрата – описує криву лінію, подібну до синусоїди малої амплітуди (рис. 2).

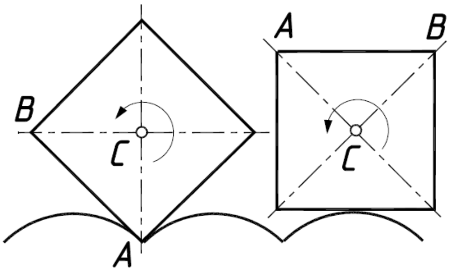


**Рис. 1.** Перекочування квадрата по періодичному криволінійному контуру, що складається із рівних дуг кіл.

**Fig. 1.** Rolling a square along a periodic curvilinear contour consisting of equal arcs of circles.

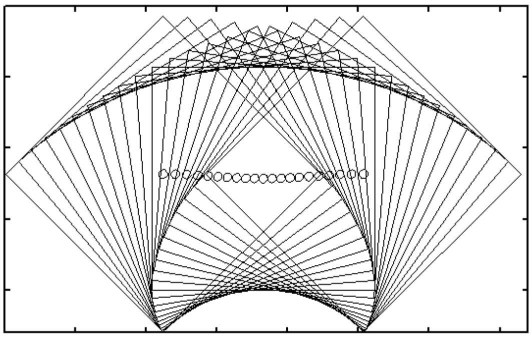

**Рис. 2.** Проміжні положення квадрата при його коченні по дузі кола.

**Fig. 2.** Intermediate positions of a square when it is rolling in an arc of a circle.

Виникає питання: якої форми має бути крива, щоб із її дуги можна було створити такий профіль, щоб центр квадрата, який перекочується, рухався по прямій лінії?

Розглянемо четвертину квадрата, тобто трикутник $ABC$ в довільному положенні при його коченні по кривій розшукуваного профілю (рис. 3). Точка контакту $T$ є миттєвим центром обертання трикутника $ABC$. Оскільки за умовою точка $C$ має рухатися паралельно осі $OX$ і вектор її швидкості має бути перпендикулярним відрізку $CT$, то $CT$ буде розташований паралельно осі $OY$. Сума $CT+y$, де $y$ – поточна координата розшукуваної кривої буде величиною сталою і дорівнюватиме діагоналі квадрата, тобто радіусу $R$ описаного навколо нього кола.

На основі взаємної перпендикулярності сторін можна записати рівність кутів: $\alpha=\psi-\varphi$. Через похідну кривої знаходимо кут нахилу дотичної, якою є сторона квадрата:

$$y' = \frac{dy}{dx} = tg\alpha = tg(\psi - \varphi)\cdot \qquad (1)$$

Із прямокутного трикутника $CNT$ можна записати: $CN/CT=\cos(\psi-\varphi)$. В свою чергу $CN=R\cos\psi$, $CT=R-y$. Із врахуванням цього запишемо:

$$\frac{R\cos\psi}{R-y} = \cos(\psi - \varphi)\cdot \qquad (2)$$

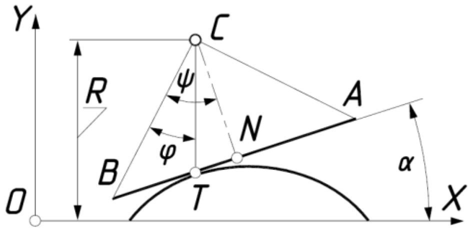


**Рис. 3.** Положення сторони $AB$ квадрата та його центра $C$ в довільній точці розшукуваної кривої.

**Fig. 3.** The position of the side AB of the square and its center C at an arbitrary point in the curve.

Після переходу від косинуса до тангенса у рівності (1) і підстановці отриманого виразу в (1) одержимо диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{(R-y)^2 - R^2\cos^2\psi}}{R\cos\psi}. \qquad (3)$$

Рівняння (3) має аналітичний розв'язок. Виходячи із умови, що при $x=0$ $y=0$ розв'язок має вигляд:

$$y = R\left(1 - \cosh\frac{x}{R\cos\psi} + \sin\psi\sinh\frac{x}{R\cos\psi}\right)\cdot \qquad (4)$$

На рис. 4 за рівнянням (4) побудовано криву, на якій потрібна дуга показана потовщеною лінією.

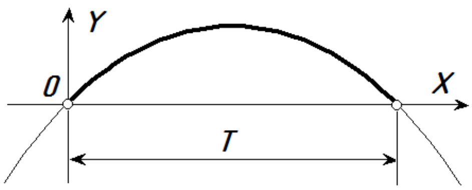


**Рис. 4.** Дуга кривої, побудованої за рівнянням (4), довжина якої дорівнює довжині сторони квадрата.

**Fig. 4.** The arc of the curve constructed by equation (4) which length is equal to the length of the side of the square.

Профіль буде складатися із періодичного повторення цієї дуги послідовним з'єднанням. Період $T$ профілю знайдемо, прирівнявши (4) до нуля:

$$T = R\,\mathrm{Arc}\cosh\left(\frac{1+\sin^2\psi}{\cos^2\psi}\right)\cos\psi\cdot \qquad (5)$$

Величина кута $\psi$, який входить до рівняння (4), залежить від числа сторін багатокутника. Він визначається із залежності $\psi=\pi/n$, де $n$ – число сторін багатокутника. Наприклад, для шестикутника $\psi=\pi/6$. На рис. 5 за рівнянням (4) побудовано фрагменти профілів для квадрата і шестикутника з рівними радіусами описаного кола.

При русі автомобільного транспорту існує граничне значення кута підйому дороги, по якій він зможе рухатися. Якщо величина кута перевищує це значення, то автомобіль навіть із заблокованими колесами буде сповзати вниз. З цієї причини переміщення фунікулерів здійснюється з допомогою лебідки. Альтернативою цьому може бути оригінальний транспортний засіб із квадратними ведучими колесами, які в конкретний момент часу контактують з різними точками криволінійного профілю (рис. 6).

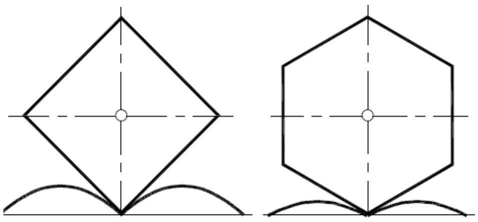

**Рис. 5.** Криволінійні профілі для кочення квадрата і шестикутника з рівними радіусами $R$ описаного кола.

**Fig. 5.** Curvilinear profiles for rolling a square and hexagon with equal radii R of the described circle.

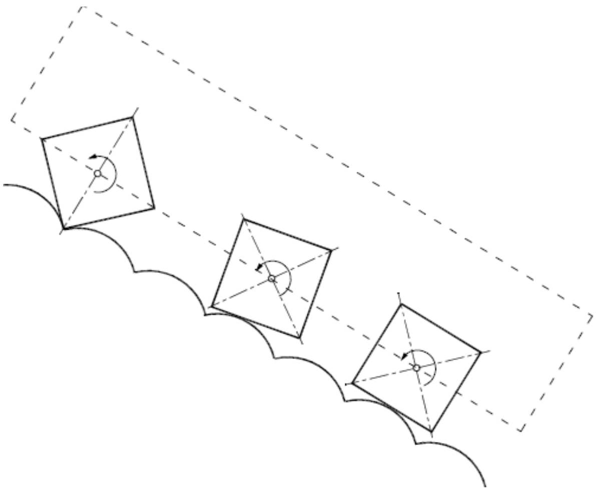

**Рис. 6.** Схема транспортного засобу із квадратними колесами, який здатен долати крутий підйом.

**Fig. 6.** The schema of a vehicle capable of overcoming steep lifting with square wheeled.

Зауважимо, що кількість сторін многокутника обмежена числом $n=4$. Якщо взяти трикутник, то кочення стає неможливим. Кут між кривими профіля в точці звороту буде меншим прямого кута. Якщо початкове положення трикутника буде таким що його вершина збігатиметься із точкою звороту профіля, то при коченні кінець сторони трикутника має рухатися по евольвенті, що вимагає прямого кута. Теоретично умова кочення виконується, але практично воно стає неможливим.

Знайдемо натуральне рівняння кривої профілю у вигляді $k=k(s)$, де $k$ – кривина кривої, $s$ - довжина її дуги. Для спрощення перетворень візьмемо інший розв'язок диференціального рівняння (3), отриманий при прирівнюванні сталої інтегрування до нуля:

$$y=\frac{1}{4}e^{\frac{x}{R\cos\psi}}+R^2e^{-\frac{x}{R\cos\psi}}\cos^2\psi\,. \qquad (6)$$

Рівняння (6) описує ту ж саму криву, що і рівняння (4), тільки спрямовану вітками вгору і з іншим розташуванням вершини в системі координат. Знайдемо довжину дуги $s$ кривої (6) за формулою:

$$s=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx\,. \qquad (7)$$

Диференціюємо рівняння (6), що входить до формули (7), і знаходимо:

$$y'=\frac{\cos\psi}{4R}e^{\frac{x}{R\cos\psi}}-Re^{-\frac{x}{R\cos\psi}}\cos\psi\,. \qquad (8)$$

Підстановкою (8) у (7) з наступним інтегруванням знаходимо:

$$s=\int e^{-\frac{x}{R\cos\psi}}\left(\frac{1}{4R\cos\psi}e^{\frac{2x}{R\cos\psi}}+R\cos\psi\right)dx= \\ =\frac{1}{4}e^{\frac{x}{R\cos\psi}}-R^2e^{-\frac{x}{R\cos\psi}}\cos^2\psi\,. \qquad (9)$$

Розв'язуємо (9) відносно $x$:

$$x=R\cos\psi\ln\left(s+\sqrt{s^2+R^2\cos^2\psi}\right). \qquad (10)$$

Підставимо вираз $x$ із (10) у (6) і після спрощень отримаємо:

$$y=\sqrt{s^2+R^2\cos^2\psi}\,. \qquad (11)$$

Рівняння (10) і(11) є параметричними рівняннями $x=x(s)$, $y=y(s)$ кривої профілю, у яких незалежною змінною є довжина дуги $s$. В цьому випадку для знаходження кривини кривої потрібно мати перші і другі похідні рівнянь (10) і (11). Диференціюємо рівняння (10):

$$x'=\frac{R\cos\psi}{\sqrt{s^2+R^2\cos^2\psi}}; \\ x''=-\frac{Rs\cos\psi}{\left(s^2+R^2\cos^2\psi\right)^{3/2}}. \qquad (12)$$

Диференціюємо рівняння (11):

$$y'=\frac{s}{\sqrt{s^2+R^2\cos^2\psi}}; \\ y''=\frac{R^2\cos^2\psi}{\left(s^2+R^2\cos^2\psi\right)^{3/2}}. \qquad (13)$$

За відомою формулою знаходимо кривину кривої:

$$k=\sqrt{x''^2+y''^2}=\frac{R\cos\psi}{s^2+R^2\cos^2\psi}\,. \qquad (14)$$

Рівняння (14) є натуральним рівнянням відомої кривої – ланцюгової лінії, де роль сталої $a$ відіграє добуток $a=R\cdot\cos\psi$, фізична суть якого полягає у відстані від центра багатокутника до його сторони (відрізок $CN$) на рис. 3.

Із праці [2] відома фізична суть сталої $a$, яка відноситься до способу утворення цієї кривої. Якщо взяти абсолютно гнучку нитку, яка має рівномірно розподілену вагу вздовж своєї довжини, і підвісити її в двох точках, то вона прийме форму ланцюгової лінії (рис. 7).

Точка $O$ є центром багатокутника, який перекочується по ланцюговій лінії. Потрібна дуга кривої знаходиться в межах періоду $T$, який визначається за формулою (5). Крайні точки цієї дуги можна знайти на перетині кривої з прямою лінією, проведеною паралельної осі $OX$ на відстані $R$ від початку координат. Відстань $R$ (радіус описаного кола) перебуває в залежності між числом $n$ сторін багатокутника і відстанню $a$: $R=a/\cos(\pi/n)$. Кут у точках звороту складеного профілю визначається автоматично і дорівнює кутові між сусідніми сторонами багатокутника.

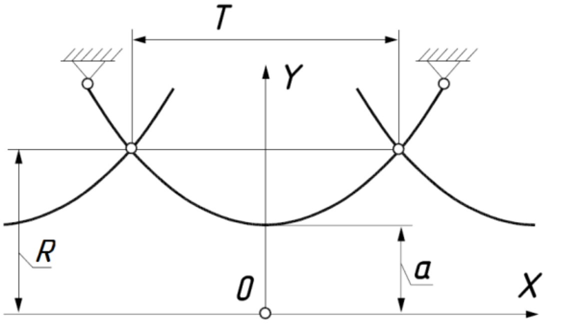


**Рис. 7.** До зв'язку геометричних характеристик дуги кривої в межах періоду $T$ із сталою $a$, яка входить до рівняння кривої.

**Fig. 7.** To solving geometric characteristics of the arc of the curve within period $T$ with constant $a$, which is included in the equation of the curve.

При перекочуванні трикутника $ABC$ (рис. 3) точку $C$ можна вважати жорстко прикріпленою до перпендикуляра $CN$, який повертається разом із прямою $AB$. Сама ж пряма $AB$ при русі залишається дотичною до кривої. Отже, дві взаємно перпендикулярні рухомі сторони – $BN$ і $CN$ – можна прийняти за орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ супровідного тригранника. Нехай в початковому положенні вершина тригранника знаходиться в точці *1* кривої (рис. 8).

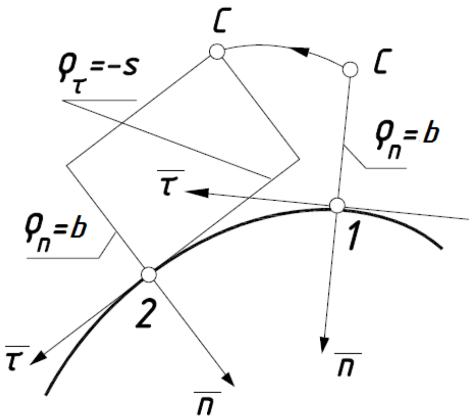


**Рис. 8.** Положення точки $C$ в системі супровідного тригранника кривої.

**Fig. 8.** Position of point C in the system of the accompanying three-edge of Frenet.

Координати точки $C$ на орти тригранника запишуться: $\rho_\tau=0$, $\rho_n=b=const$. При переході тригранника із точки *1* в точку *2* (а цей перехід здійснюється ковзанням орта $\bar{\tau}$ по кривій) положення точки $C$ в триграннику зміниться. Координата $\rho_n$ залишиться такою ж, а координата $\rho_\tau$ стане рівною довжині дуги $s$ між точками *1* і *2*, оскільки за умовою сторона $AB$ не ковзає по кривій, а перекочується по ній. Отже, положення точки $C$ в системі тригранника можна записати через її проекції на орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$:

$$\rho_\tau = -s; \qquad \rho_n = b. \tag{15}$$

В (15) дугу $s$ взято із знаком «мінус», оскільки її зростання відбувається в сторону, протилежну напрямку орта $\bar{\tau}$ дотичної. Стала $b$ може приймати як додатне, так і від'ємне значення. На рис. 7 вона має від'ємне значення.

Рівняння (15) є параметричними рівняннями переміщення точки $C$ по відношенню до ортів рухомої системи тригранника. Отже, це рух є відносним. Для знаходження абсолютної траєкторії точки С, тобто кривої в нерухомій системі $OXY$, застосуємо відомі формули переходу [5]:

$$x_C = \rho_\tau \cos\alpha - \rho_n \sin\alpha + \int \cos\alpha \, ds; \qquad y_C = \rho_\tau \sin\alpha + \rho_n \cos\alpha + \int \sin\alpha \, ds, \tag{16}$$

де кут $\alpha$ між ортом $\bar{\tau}$ рухомого тригранника і віссю $OX$ нерухомої системи координат визначається інтегруванням натурального рівняння:

$$\alpha = \int k ds. \tag{17}$$

Застосуємо формули (16), (17) по відношенню до ланцюгової лінії, в натуральному рівнянні (14) якої стала $R\cdot\cos\psi$ позначена через $a$. Знаходимо кут $\alpha$:

$$\alpha = \int \frac{a}{s^2+a^2} ds = \text{Arctg}\,\frac{s}{a}. \tag{18}$$

Підставляємо (18) у (16) і після інтегрування і перетворень отримаємо:

$$x_C = \frac{a\rho_\tau}{\sqrt{a^2+s^2}} - \frac{s\rho_n}{\sqrt{a^2+s^2}} + a\,\text{Arc}\sinh\frac{s}{a}; \qquad y_C = \frac{s\rho_\tau}{\sqrt{a^2+s^2}} + \frac{a\rho_n}{\sqrt{a^2+s^2}} + \sqrt{a^2+s^2}. \tag{19}$$

Наступний крок – підставляємо рівняння (15) у (19) і після спрощень остаточно отримуємо:

$$x_C = a\,\text{Arc}\sinh\frac{s}{a} - \frac{s(a+b)}{\sqrt{a^2+s^2}}; \qquad y_C = \frac{a(a+b)}{\sqrt{a^2+s^2}}. \tag{20}$$

Якщо $a=-b$, то $y_C$ у рівняннях (20) стає рівним нулю, тобто рівняння (20) в цьому випадку опишуть пряму лінію, що збігається із віссю $OX$. Таким чином, ми отримали підтвердження достовірності отриманого раніше рівняння (4). Властивість, що точка $C$ при обкочуванні прямої по ланцюговій лінії опише пряму справедлива для всієї її довжини.

*Твердження*. Якщо в початковому положенні провести дотичну до ланцюгової лінії у її вершині і жорстко прив'язати до неї точку на відстані сталої $a$ від точки дотику в сторону, протилежну напряму віток, яка входить до її натурального рівняння, то траєкторією цієї точки при обкочуванні дотичної без ковзання по кривій буде пряма лінія, перпендикулярна осі симетрії ланцюгової лінії.

Цією властивістю можна доповнити відомі властивості ланцюгової лінії, наведені в праці [2].

Одержані рівняння (19) дають можливість побудувати і інші траєкторії точки $C$, яка в початковому положенні розташована на орті головної нормалі на довільній відстані $b$ від вершини.

Якщо побудувати ланцюгову лінію за рівняннями (10) і (11), то її вершина буде зміщена вздовж осі $OX$ від початку координат на певну величину. Це пояснюється тим, що явне рівняння (6) ланцюгової лінії було взято без накладення додаткових вимог. Щоб такого зміщення не було, знайдемо параметричні рівняння кривої за допомогою переходу від натурального рівняння. Враховуючи те, що $a=R\cdot\cos\psi$, натуральне рівняння (14) ланцюгової лінії запишеться:

$$k=\frac{a}{s^2+a^2}\cdot \tag{21}$$

Перехід до параметричних рівнянь відбувається за формулами:

$$x=\int\cos\alpha\,ds;\qquad y=\int\sin\alpha\,ds, \tag{22}$$

де кут $\alpha$ визначається інтегруванням виразу (17). Цей кут знайдено у (18). Підставивши (18) у (22), знаходимо нові параметричні рівняння ланцюгової лінії, які небагато відрізняються від рівнянь (10), (11):

$$x=a\,\mathrm{Arc}\sinh\frac{s}{a};\qquad y=\sqrt{a^2+s^2}. \tag{23}$$

На рис. 9 побудована ланцюгова лінія за параметричними рівняннями (23), яка показана потовщеною лінією, і траєкторії точки *C*, побудовані за (20) рівняннями.

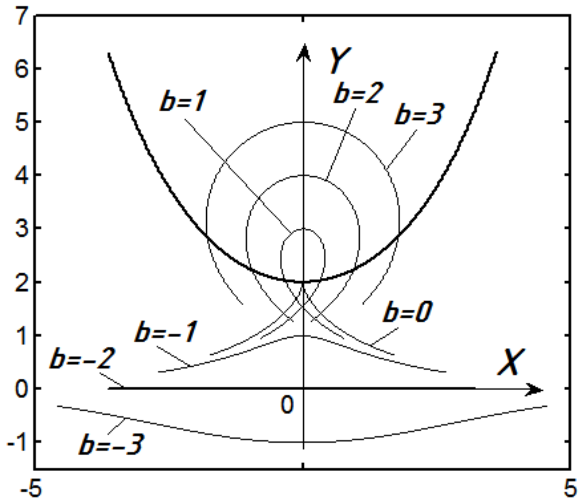


**Рис. 9.** Ланцюгова лінія, побудована при *a=2* і траєкторії точки *C*, побудовані при різних значеннях сталої *b*.

**Fig. 9.** The chain line constructed at *a=2* and the trajectories of point *C* constructed at different values of constant *b*.

При *b= –a*, тобто при *b= –2* траєкторією є пряма лінія, яка теж позначена потовщеною. При *b=0* побудованою траєкторією є евольвента ланцюгової лінії. Змінюючи величину сталої *b*, можна отримувати різні криві. Всі вони є траєкторіями точки *C*, яка жорстко прив'язана до прямої, що обкочується по ланцюговій лінії.

На рис. 2 побудовано траєкторію точки *C* (центра квадрата) у вигляді дискретного ряду точок, сторона якого обкочується по дузі кола. Побудуємо за рівняннями (16) неперервну криву. Натуральне рівняння кола має вигляд:

$$k=\frac{1}{r}=const, \tag{23}$$

де *r* – його радіус.

За формулою (17) знаходимо кут $\alpha$:

$$\alpha=\frac{s}{r}\cdot \tag{24}$$

Після підстановки (15) і (24) у (16) і подальших перетворень одержимо:

$$x_C=(r-b)\sin\frac{s}{r}-s\cos\frac{s}{r};\qquad y_C=-(r-b)\cos\frac{s}{r}-s\sin\frac{s}{r}. \tag{25}$$

На рис. 10 побудовано половину кола радіуса r=2 і відповідну траєкторію точки *C* за рівняннями (25). Потовщеною лінією виділено ділянки дуги і траєкторії точки, що відповідають рис. 2. Для цього випадку (тобто для квадрата) було знайдено значення сталої *b=r*cos(π/4)* і межі зміни дуги *s: s= –πr/2… πr/2.*

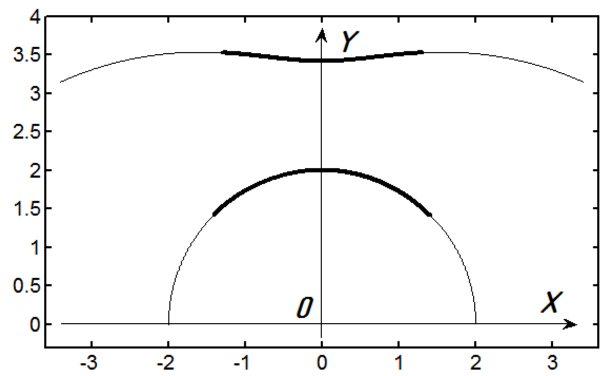


**Рис. 10.** Траєкторія центра квадрата, сторона якого перекочується по дузі кола відповідно до рис. 3.

**Fig. 10.** The trajectory of the center of the square, the side of which is rolled over the arc of the circle in accordance with Fig. 3.

На рис. 11 траєкторію точки *C*, фрагмент якої показано на рис. 10, побудовано для всього кола. Інша крива побудована при тому ж значенні *b*, але з протилежним знаком. При *b=0* побудовано евольвенту кола. З рис. 11 видно, що при тривалому обкочуванні прямої по колу траєкторія точки *C* наближається до евольвенти кола.

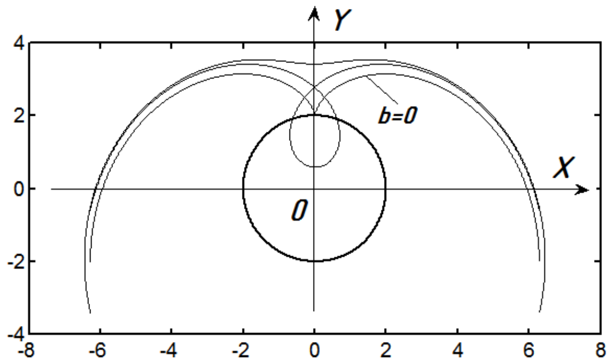


**Рис. 11.** Траєкторія точки *C* при різних значеннях сталої *b* і для дуги всього кола.

**Fig. 11.** The trajectory of point C at different values of constant b and for the arc of the whole circle.

Візьмемо ще одну криву, у якої кривина в кожній точці більша в два рази, ніж у ланцюгової лінії при однаковому значенні довжини дуги *s*. Відповідно і її натуральне рівняння отримано множенням на 2 натурального рівняння ланцюгової лінії:

$$k = \frac{2a}{s^2 + a^2} \cdot \qquad (26)$$

Після здійснення переходу від натурального до параметричних рівнянь за формулами (17) і (22) отримаємо:

$$x = 2a \cdot \mathrm{Arctg}\left(\frac{s}{a}\right) - s; \quad y = a \cdot \ln\left(\frac{a^2 + s^2}{a^2}\right). \qquad (27)$$

За формулою (17) знаходимо кут $\alpha$:

$$\alpha = \int \frac{2a}{s^2 + a^2} ds = 2\mathrm{Arctg}\,\frac{s}{a}. \cdot \qquad (28)$$

Траєкторію точки *C* знаходимо за рівняннями (16). У них правою частиною є параметричні рівняння (22) вихідної кривої. Підставляємо в (16) вираз кута $\alpha$ із (28) і рівняння відносного руху точки *C* із (15) і отримуємо:

$$x_C = s - \frac{2a(a+b)s}{a^2 + s^2} + x; \quad y_C = \frac{a^2 b - (2a+b)s^2}{a^2 + s^2} + y, \qquad (29)$$

де $x=x(s)$ і $y=y(s)$ наведено в (27).

На рис. 12 за рівняннями (27) побудовано вихідну криву і за рівняннями (29) евольвенту при $b=0$. Для наочності показано, що дотичні перпендикулярні до неї.

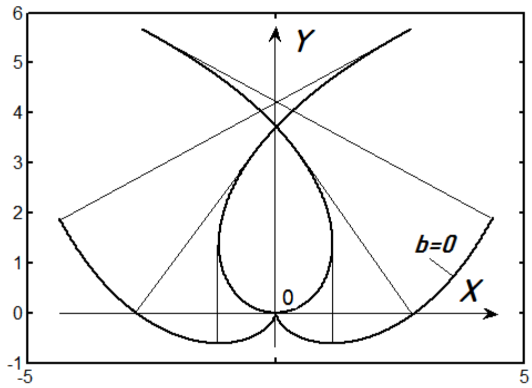


**Рис. 12.** Крива, побудована за рівняннями (27) і її евольвента, побудована за рівняннями (29).

**Fig. 12.** The curve constructed by equations (27) and its involute, constructed by equations (29).

Слід зауважити, що координата $\rho_n$ може приймати не тільки стале значення, а і бути функцією дуги *s*, тобто під час руху тригранника здійснювати відносний рух паралельно головній нормалі по заданому закону. Наприклад, поставимо задачу, координата *x* траєкторії точки *C* в кожен момент руху дорівнювала відповідній координаті вихідної кривої. Для цього прирівняємо ліву складову першого рівняння (29) до нуля:

$$s - \frac{2a(a+b)s}{a^2 + s^2} = 0 \qquad (30)$$

Розв'язком рівняння (30) буде залежність:

$$b = \rho_n = \frac{s^2 - a^2}{2a} \qquad (31)$$

Після підстановки (31) в (29) отримаємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії точки *C*, у якої встановлено відповідність, яка полягає у рівності координати *x* при однакових значеннях змінної *s*.

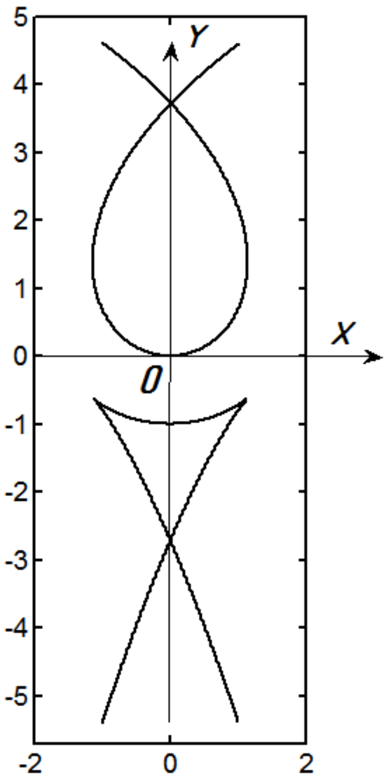


**Рис. 13.** Абсолютна траєкторія точки *C*, рівняння відносного руху якої є заданими функціями.

**Fig. 13.** The absolute trajectory of point C, the equation of relative motion of which are given functions.

## Висновки

Знайдено параметричні рівняння кривої та межі потрібної дуги для конструювання криволінійного профілю. Профіль конструюється за умови кочення по ньому рівностороннього багатокутника таким чином, що його центр рухається по прямій лінії. Доведено, що такою кривою є ланцюгова лінія, стала *a* якої є відстанню від центра багатокутника до його сторони. Для забезпечення можливості фізичного кочення число сторін багатокутника має бути більше трьох.

## Список літератури

1. *Заика П. М.* Избранные задачи земледельческой механики. Киев. Изд-во УСХА, 1992. 507 с.

2. *Савелов А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва. Физматгиз, 1960. 294 с.

3. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия. Изд. 3-е. Москва. Наука, 1981. 344 с.

4. *Руденко С. Ю.* Геометричне моделювання траєкторії фокуса еліпса, який котиться по прямій. *Праці ТДАТУ. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2011. Т. 49. С. 171 – 177.

5. *Пилипака С. Ф.* Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютна швидкість і траєкторія. *Електротехніка і механіка.* 2006. №1. С.84-94.

## References

1. *Zaika P. M.* (1992). Selected tasks of agricultural mechanics. Kyiv. USHA Publishing House, 507.
2. *Savelov A. A.* (1960). Flat curves. Systematics, properties, applications. Moscow: Fizmatgiz, 294.
3. *Hilbert D., Kon-Vossen S.* (1981). Visual geometry. Ed. 3rd Moscow: Science, 344.
4. *Rudenko S. Yu.* (2011). Geometric modeling of the trajectory of the focus of the ellipse, which rolls in a straight line. *Against TDAT. Applied geometry and engineering graphics.* Vol. 49, No. 4, 171 - 177.
5. *Pylypaka S. F.* (2006). Theory of complex motion of a material point on a plane. Part One. Absolute speed and trajectory. *Electrical engineering and mechanics*. №1, 84-94.

## КАЧЕНИЕ МНОГОУГОЛЬНИКА ПО КРИВОЛИНЕЙНОМУ ПРОФИЛЮ

*Т.А. Кресан, С.Ф. Пилипака, В.Н. Бабка, Я.С. Кремец*

**Аннотация.** В статье рассмотрено качение плоской фигуры в виде равностороннего многоугольника по криволинейному профилю. Профиль является периодическим и образуется последовательным повторением дуги симметричной кривой в прямолинейном направлении. Уравнение кривой, с дуги которой конструируется криволинейный профиль, найдено при условии, что центр многоугольника при его качении по профилю, должен двигаться по прямой линии. Качения происходит при отсутствии скольжения, поэтому длина дуги кривой равна длине стороны многоугольника. При соединении соседних дуг профиля образуется точка возврата, в которой можно провести касательные к обеим дугам. Угол между этими касательными должен быть равным углу между соседними сторонами многоугольника. Например, для квадрата этот угол является прямым. Выполнение этого условия необходимо для обеспечения плавного перекатывания многоугольника при прохождении его вершины через точку возврата.

На основе установления зависимостей между сторонами и углами рассмотренных фигур, одна из которых перекатывается по другой, было составлено дифференциальное уравнение первого порядка, которое имеет аналитическое решение. Этим решением является явное уравнение разыскиваемой кривой. Переходом от явного к натуральному уравнению выяснено, что найденной кривой является известная цепная линия. Найдены координаты точек на кривой, ограничивающие дугу нужной длины. Приведены выражения для определения периода криволинейного профиля.

В статье показана целесообразность применения сопровождающего трехгранника кривой для проверки достоверности полученного результата. При движении трехгранника вдоль плоской кривой один его орт является касательным к ней, а второй – перпендикулярным к первому. В системе этих двух взаимно перпендикулярных ортов (касательной и главной нормали) задается такое относительное движение точки, которое моделирует перекатывание касательной по кривой. Сумма двух движений - относительного движения точки в системе трехгранника и переносного движения самого трехгранника по кривой - дает абсолютную траекторию точки. Для применения такого подхода необходимо иметь уравнение кривой в функции длины собственной дуги. За такое уравнение было взято натуральное уравнение цепной линии. Были составлены уравнения относительного движения точки, которая является центром многоугольника, в подвижной системе сопровождающего трехгранника. При сложении относительного и переносного движений было получено абсолютную траекторию, которой является прямая линия. Этим был подтверждено тот факт, что разыскиваемой кривой является именно цепная линия. В статье сформулировано соответствующее утверждение. Также показано, что число сторон многоугольника должно быть более трех. Для треугольника качение становится невозможным в момент прохождения точки возврата криволинейного профиля.

**Ключевые слова:** равносторонний многоугольник, криволинейный профиль, качение, цепная линия.

## ROLLING OF POLIGON ON CURVINAL PROFILE

*T. A. Kresan, S. F. Pylypaka, V. M. Babka, Ya. S. Kremets*

**Abstract.** Rolling a flat figure in the form of an equilateral polygon along a curvilinear profile is considered in the article. The profile is periodic and is formed by the successive repetition of the arc of the symmetric curve in the straight-line direction. The equation of the curve from which the curvilinear profile is constructed is found provided that the center of the polygon, when rolling it on the profile, must move on a straight line. Rolling occurs in the absence of slip, so the length of the arc of the curve is equal to the length of the side of the polygon. When connecting adjacent arcs of a profile, a return point is formed at which tangents to both arcs can be drawn. The angle between these tangents must be equal to the angle between the adjacent sides of the polygon. For example, for a square, this angle is straight. This condition is necessary to ensure a smooth rolling of the polygon at the origin of its vertex through the return point.

Based on the relationship between the sides and the angles of the considered figures, one of which is rolled over the other, a first-order differential equation is constructed which has an analytical solution. This solution is an explicit equation of the wanted curve. The transition from the explicit to the natural equation reveals that the curve found is a known chain line. The coordinates of the points on the curve that limit the arc of the desired length are found. The expression for determining the period of curvilinear profile is given.

The expression for determining the period of curvilinear profile is given. When moving a three-edge along a plane curve, one orth is tangent to it, and the second is perpendicular to the first. In the system of these two mutually perpendicular orts (tangent and principal normal), a relative motion of a point is given, which simulates the rolling of the tangent along the curve. The sum of two motions - the relative motion of a point in the system of the three-edge and the figurative movement of the three-edge itself on the curve - gives the absolute trajectory of the point. To apply this approach, it is necessary to have an equation of the curve in the function of the length of its arc. For this equation, the natural equation of the chain line was taken. The equation of the relative motion of a point, which is the center of the polygon, in the moving system of the accompanying three-edge was drawn up. When adding relative and portable motions, an absolute trajectory was obtained, which is a straight line. It confirmed the fact that the curve is the chain line. The corresponding statement is formulated in the article. It is also shown that the number of sides of a polygon should be more than three. For a triangle, rolling becomes impossible at the point of return of the curvilinear profile.

**Key words:** equilateral polygon, curved profile, rolling, chain line.

**Т. А. Кресан** ORCID 0000-0002-8280-9502.
**С. Ф. Пилипака** ORCID 0000-0002-1496-4615.
**В. М. Бабка** ORCID 0000-0003-4971-4285.
**Я. С. Кремець** ORCID 0000-0003-0675-5757.